ANNEXE 2

LES FONCTIONS

A.2.1 DÉFINITION D'UNE FONCTION

Soient A et B deux ensembles donnés. Supposons qu'à chaque élément $a \in A$, on associe un élément $b \in B$. L'ensemble de ces associations définit une ***fonction*** ou ***application*** de A dans B, ce qu'on écrit :

$$f : A \to B \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{f} B$$

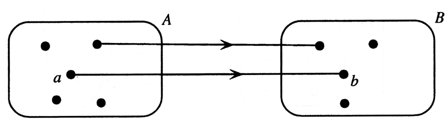

FIG. 2.1 – Graphe d'une fonction

Si $b \in B$ est associé à $a \in A$, on écrit $b = f(a)$; b est appelé l'*image* de a. À chaque fonction $f : A \to B$ correspond le sous-ensemble de $A \times B$ défini par :

$$\{(x, y)|x \in A, y = f(x) \in B\}. \tag{2.1}$$

EXEMPLE A.2.1

Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Définissons la fonction f qui associe à tout élément x de A une valeur y de B égale au double de x.

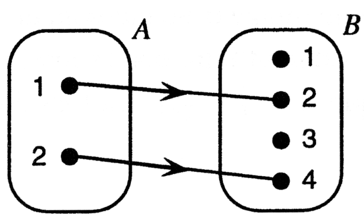

FIG. 2.2 – Graphe de la fonction

Au vu de la figure 2.2, on constate que f est définie par le sous-ensemble de $A \times B$ suivant :

$$f = \{(1, 2), (2, 4)\} = \{(x, y)|y = 2x, x \in A\},$$

ce qu'on énonce encore en disant que f est définie par

$$y = 2x\,, \quad \text{où} \quad x \in \{1, 2\}.$$

Un cas particulier intéressant est celui où le *domaine de définition* de f, noté A ci-dessus, est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties d'un ensemble de référence Ω. On parle alors de ***fonction d'ensembles***.

EXEMPLE A.2.2

Reprenons l'exemple A.1.2 de l'annexe 1, dans lequel $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Nous pouvons définir sur $\mathcal{P}(\Omega)$ une fonction f qui associe à chaque sous-ensemble E de Ω le nombre d'éléments qu'il contient :

$$f : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{V} = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

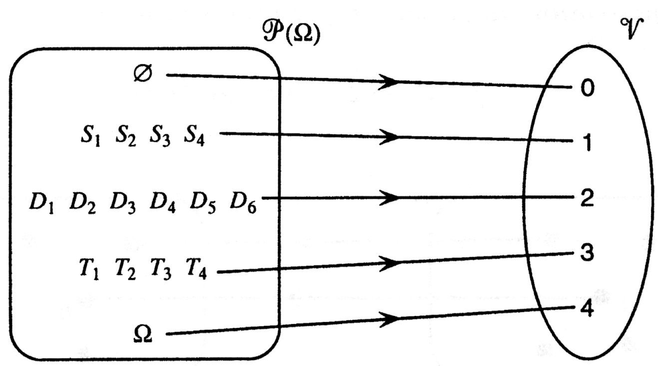

FIG. 2.3 – Graphe de f

Ainsi, par exemple :

$$f(\emptyset) = 0\,, \quad f(S_2) = 1\,, \quad f(D_4) = 2\,, \quad f(T_3) = 3\,, \quad f(\Omega) = 4.$$

Soit $f : A \to B$. Si les images de deux éléments distincts de A sont des éléments distincts de B, f définit une ***injection***. Si, de plus, chaque élément de B est une image d'un élément de A, on parle de ***bijection***. Dans ce cas, à chaque $b \in B$, on peut faire correspondre un élément $a \in A$ tel que $b = f(a)$. On écrit alors que $a = f^{-1}(b)$. La fonction $f^{-1} : B \to A$ est dite ***fonction inverse***.

A.2.2 GRAPHE D'UNE FONCTION

On appelle ***graphe d'une fonction*** f la représentation graphique des couples (x, y) définis par (2.1). Lorsque A est fini, on peut utiliser les diagrammes de Venn. Lorsque A et B sont inclus ou égaux à $\mathbb{R}$, on peut faire appel à une représentation dans un repère ; f est alors définie par un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLE A.2.3

Reprenons l'exemple A.2.1 en remplaçant A et B par $\mathbb{R}$: $f = \{(x, y)|y = 2x, x \in \mathbb{R}\}$. Prenons quelques couples particuliers de cet ensemble :

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-2	0	2	4	6

f définit ainsi une droite passant par l'origine 0.

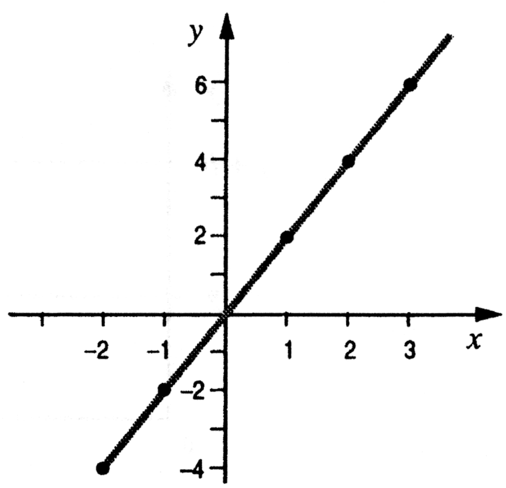

FIG. 2.4 – Représentation d'une droite

On peut remarquer que la fonction f est bijective. La fonction inverse f^{-1} est dès lors définie par :

$$f^{-1} = \{(y, x)|x = y/2, y \in \mathbb{R}\}.$$

La représentation graphique d'une droite dans un plan s'effectue en définissant un repère (ou système de coordonnées cartésiennes). On considère deux droites réelles orthogonales se coupant en un point 0, appelé *origine*. On oriente chaque droite comme dans la figure 2.4. On définit une échelle sur chaque axe ainsi construit en choisissant une *unité* sur chacun d'eux et en les graduant ensuite. Un point du plan (x, y) est alors représenté de telle sorte que la projection de ce point sur l'axe $0x$ correspond à la graduation x (*abscisse* du point) et que la projection de ce point sur l'axe $0y$ correspond à la graduation y (*ordonnée* du point).

EXEMPLE A.2.4

Représentons graphiquement la droite d'équation

$$y = 2x + 1,$$

où $x \in \mathbb{R}$. Considérons quelques valeurs particulières des couples (x, y) définis par cette équation :

x	-2	-1	$-1/2$	0	1	2
y	-3	-1	0	1	3	5

En joignant ces points par une droite, on obtient le graphique de la figure 2.5.

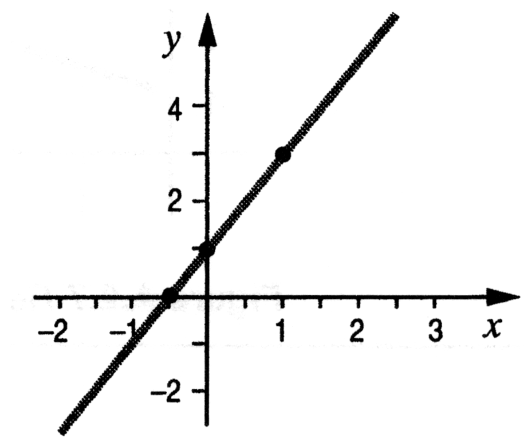

FIG. 2.5 – Représentation de $y = 2x + 1$

Si on considère l'équation générale d'une droite $y = a + bx$, où $x \in \mathbb{R}$, a et b étant deux constantes réelles, on constate que :

1. l'***ordonnée à l'origine*** a est égale à la valeur de y pour laquelle $x = 0$ (intersection de la droite et de l'axe $0y$) ;
2. le ***coefficient angulaire*** b mesure l'accroissement de y correspondant à un accroissement unitaire de x ; b est encore appelé la ***pente*** de la droite.

Remarquons enfin qu'une droite est définie dès que l'on connaît deux de ses points. Ainsi, on peut montrer que la droite passant par les points (x_1, y_1)

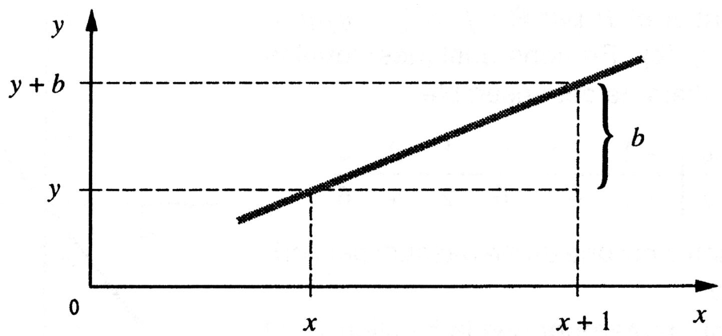

FIG. 2.6 – Représentation de $y = a + bx$

et (x_2, y_2) est définie par l'équation

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{2.2}$$

EXEMPLE A.2.5

La droite passant les points $(2, 2)$ et $(4, 3)$ a pour équation :

$$y - 2 = \frac{3 - 2}{4 - 2}(x - 2) \Rightarrow y = 0.5x + 1.$$

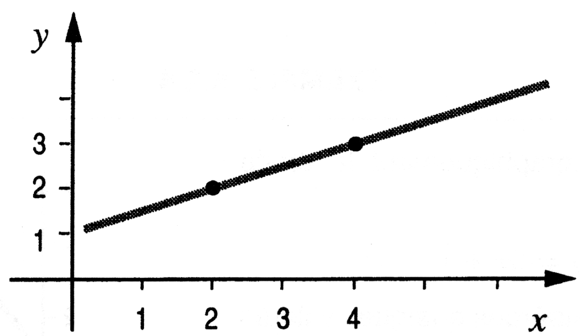

FIG. 2.7 – Représentation de $y = 0.5x + 1$

A.2.3 EXERCICES PROPOSÉS

E.A.2.1 Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Définissez le sous-ensemble de $A \times B$ qui correspond à la fonction $f : A \to B$ associant à tout élément x de A une valeur y de B égale au triple de x.

$\boxed{\textbf{E.A.2.2}}$ Soit $\Omega = \{a, b, c\}$. Définissez la fonction d'ensembles f qui, à tout sous-ensemble E de Ω, fait correspondre le nombre d'éléments de E.

$\boxed{\textbf{E.A.2.3}}$ Soit $\Omega = \{(x, y)|x \in \{1, 2\}$ et $y \in \{1, 2, 3\}\}$. Définissez la fonction d'ensembles f qui, à tout sous-ensemble E de Ω, fait correspondre le nombre d'éléments de E tels que $x < y$.

$\boxed{\textbf{E.A.2.4}}$ Soient $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$. Définissez et représentez graphiquement la fonction f décrite à l'exercice E.A.2.1.

$\boxed{\textbf{E.A.2.5}}$ Définissez et représentez graphiquement les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

(a) à chaque nombre, f associe son cube ;

(b) à chaque nombre, g associe le nombre 5 ;

(c) à chaque nombre strictement positif, h associe son carré et à chaque nombre non positif, h associe le nombre 6.

Trouvez aussi les valeurs prises par chaque fonction pour $x = 4$, $x = -2$ et $x = 0$.

$\boxed{\textbf{E.A.2.6}}$ Représentez graphiquement les fonctions suivantes :

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $y = f(x) = x^2 + x - 6$;

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $y = g(x) = x^2 + 3$.

$\boxed{\textbf{E.A.2.7}}$ Tracez, dans un système de coordonnées cartésiennes, les droites d'équation[1] :

(a) $D_1 : y = x + 4$;

(b) $D_2 : y = -2x + 3$;

(c) $D_3 : y = x/2 + 3/4$;

(d) $D_4 : y = 5/2$;

(e) $D_5 : x = 4$.

$\boxed{\textbf{E.A.2.8}}$ Déterminez l'équation de la droite passant par les points :

(a) $(0, 0)$ et $(2, 4)$;

(b) $(-1, -1)$ et $(1, 1)$;

(c) $(1, 2)$ et $(4, 5)$;

(d) $(2, 3)$ et $(4, 3)$;

(e) $(4, 5)$ et $(6, -2)$.

[1] On indique qu'une droite D est d'équation $y = a + bx$ par la notation $D : y = a + bx$.