ANNEXE 3

LE SIGNE DE SOMMATION

A.3.1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

L'analyse statistique recourt souvent à la sommation de valeurs définies à partir des observations. Le signe de sommation Σ permet de simplifier l'écriture d'une telle opération.

Les n valeurs observées d'une série statistique[1] sont représentées d'une part au moyen d'une lettre rappelant le nom de la variable $(x, y, \ldots)$ et, d'autre part, d'une autre lettre $(i, j, k, \ldots)$ placée en indice et permettant d'identifier l'élément considéré :

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}.$$

La sommation de ces nombres peut s'écrire

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_i + \ldots + x_n.$$

Quand le nombre de termes est élevé, cette écriture devient fastidieuse. Il est alors conseillé d'utiliser une formulation plus synthétique qui repose sur la constatation suivante : les termes de la somme ne se distinguent que par les *indices* et, en outre, ces derniers sont les *entiers successifs* compris entre 1 et n. La connaissance de la première et de la dernière valeur de cet indice nous permet d'en déduire les autres. C'est pourquoi, la somme des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est généralement présentée sous la forme

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Cette expression se lit comme suit : *on somme les x_i, où i prend les valeurs entières comprises entre* 1 (chiffre indiqué sous le Σ) *et n* (chiffre apparaissant au-dessus du Σ). Notons que, pour des raisons d'ordre purement typographique, la somme des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est également parfois écrite sous la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i$. L'écriture synthétique de la somme de valeurs a beaucoup de souplesse. Nous en présentons quelques exemples.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$;

[1] Ce qui suit peut aussi être appliqué aux distributions observées et groupées.

2. $\sum_{j=3}^{5} x_j = x_3 + x_4 + x_5$;
3. $\sum_{j=1}^{4} y_j^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$.

Nous pouvons aussi exclure une des valeurs possibles de l'indice :

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq 4}}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_5.$$

Lorsqu'une somme porte sur tous les termes d'une série $\{x_1, \ldots, x_n\}$, il est fréquent de remplacer

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{par} \quad \sum_{i} x_i$$

afin d'alléger l'écriture. Il est alors sous-entendu que i varie de 1 à n.

Par ailleurs, on peut utiliser des indices distincts pour représenter les mêmes expressions :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{k=1}^{n} x_k = \ldots$$

Cette possibilité est surtout utile quand on fait intervenir dans une même expression un ou plusieurs facteurs sous forme de sommation. Par exemple :

$$\sum_{j=1}^{n} \left(x_j \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2 .$$

Enfin, on peut énoncer un certain nombre de propriétés algébriques dont les plus utilisées sont les suivantes.

Propriété A.3.1 Si a est une constante,

$$\sum_{i=1}^{n} a = na. \tag{3.1}$$

Démonstration :

$$\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ termes}} = na.$$

Propriété A.3.2 Si a est une constante,

$$\sum_{i=1}^{n} a x_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{3.2}$$

Démonstration :

$$\sum_{i=1}^{n} a x_i = a x_1 + \cdots + a x_n = a(x_1 + \cdots + x_n) = a \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Propriété A.3.3

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{3.3}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) &= (x_1 + y_1) + \ldots + (x_n + y_n) \\ &= (x_1 + \ldots + x_n) + (y_1 + \ldots + y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned}$$

Propriété A.3.4

$$\sum_{i=1}^{n} (a x_i + b y_i)^2 = a^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + b^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2. \tag{3.4}$$

Démonstration[2] :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (a^2 x_i^2 + 2ab x_i y_i + b^2 y_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2ab x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} b^2 y_i^2 \quad \text{[cf. (3.3)]} \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + b^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2. \quad \text{[cf. (3.2)]} \end{aligned}$$

Propriété A.3.5

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j. \tag{3.5}$$

---

[2] Rappelons que si a et b sont deux quantités réelles, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 &= (x_1 + \ldots + x_n)^2 = (x_1 + \ldots + x_n)(x_1 + \ldots + x_n) \\
&= x_1^2 + x_1(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + x_2 x_1 + x_2^2 \\
&\quad + x_2(x_3 + x_4 + \ldots + x_n) + x_3(x_1 + x_2) + x_3^2 \\
&\quad + x_3(x_4 + x_5 + \ldots + x_n) + \ldots \\
&\quad + x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + x_n^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_i x_j.
\end{aligned}$$

A.3.2 EXERCICES PROPOSÉS

E.A.3.1 Développez les expressions suivantes :

a) $\sum_{i=1}^{4}(x_i - a)^2$; b) $\sum_{i=1}^{5}(a - 2x_i)^2$; c) $\sum_{i=2}^{4}(x_i - a)^2$;

d) $\sum_{i=1}^{5} a(x_i - b)$; e) $\sum_{i=1}^{4}(2x_i - 3)^2$; f) $\sum_{i=1}^{4}(x_i - a)^3$;

g) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)$; h) $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j - a}{b}$; i) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$;

j) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - a}{b}\right)^2$; k) $\sum_{j=1}^{J} n_j(x_j - a)^2$; l) $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J} n_j(x_j - a)^2$.

E.A.3.2 Considérons la série $\{x_1 = 1; x_2 = 4; x_3 = 2; x_4 = 3$ et $x_5 = 5\}$. Déterminez la valeur des sommes suivantes[(3)] :

a) $\sum_{i=1}^{5} x_i$; b) $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i$; c) $\sum_{i=1}^{5}(x_i - 3)$; d) $\sum_{i=1}^{5} x_i^2$;

e) $\sum_{i=1}^{5} 4x_i$; f) $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}|x_i - 3|$; g) $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i - 3)^2$; h) $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i - 3)^3$.

E.A.3.3 Décomposez les expressions suivantes :

a) $\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right]$; b) $\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right]^2$.

(3) Rappelons, pour le point f), que la *valeur absolue* $|a|$ d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ vaut a, si a est positif, et son opposé, si a est négatif. Exemples : $|4| = 4; |-3| = 3$.

E.A.3.4 Utilisez le signe de sommation pour écrire les expressions suivantes :

a) $y_1 + y_2 + \ldots + y_5$; b) $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_Jx_J$;

c) $a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$; d) $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$;

e) $f_1(x_1 - a)^2 + f_2(x_2 - a)^2 + \ldots + f_J(x_J - a)^2$;

f) $1 + 2 + 3 + \ldots + 8$; g) $1 + 4 + 9 + 16 + 25$;

h) $-1 + 4 - 27 + 256 - 3125$.

E.A.3.5 Montrez au moyen d'exemples simples que :

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$, si $\displaystyle\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$;

(d) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$, si $\displaystyle\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$;

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i + 1)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i + n$.

E.A.3.6 Considérons la matrice (voir annexe 5) :

$$\mathbf{X}_{J\times K} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1K} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{j1} & \cdots & x_{jk} & \cdots & x_{jK} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{J1} & \cdots & x_{Jk} & \cdots & x_{JK} \end{pmatrix}.$$

Dites ce que représentent les expressions suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} x_{jk}$; b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{J} x_{jk}$; c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{K} x_{jk}$.