ANNEXE 6

LOIS DE PROBABILITÉ

A.6.1 ANALOGIE D.O.1-D.P.1

D.O.1 $\{x_j, f_j); j = 1, \ldots, J\}$	**D.P.1** $\{x_j, p_j); j = 1, \ldots, J\}$
1. Paramètres de position	
a) Moyenne : $\overline{x} = \sum_j f_j x_j$	*a) Moyenne* : $\mu = \sum_j p_j x_j$
b) Quantile d'ordre $p^{(1)}$:	*b) Quantile d'ordre* $p^{(2)}$:
$x_p = \begin{cases} x_j, \text{ si } F_{j-1} < p < F_j \\ \frac{x_j + x_{j+1}}{2}, \text{ si } F_j = p \end{cases}$	$x_p = \begin{cases} x_j, \text{ si } F(x_{j-1}) < p < F(x_j) \\ \frac{x_j + x_{j+1}}{2}, \text{ si } F(x_j) = p \end{cases}$
c) Médiane : $x_{1/2}$	*c) Médiane* : $x_{1/2}$
d) Mode : valeur la plus fréquente	*d) Mode* : valeur la plus probable
(il peut y avoir plusieurs modes)	(il peut y avoir plusieurs modes)
2. Paramètres de dispersion	
a) Variance :	*a) Variance* :
$s^2 = \sum_j f_j (x_j - \overline{x})^2$	$V(X) = \sigma^2 = \sum_j p_j (x_j - \mu)^2$
b) Écart-type : $s = \sqrt{s^2}$	*b) Écart-type* : $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
c) Coefficient de variation : $\frac{s}{\overline{x}}$	*c) Coefficient de variation* : $\frac{\sigma}{\mu}$
d) Écart-moyen absolu : $\sum_j f_j \lvert x_j - \overline{x} \rvert$	*d) Écart-moyen absolu* : $\sum_j p_j \lvert x_j - \mu \rvert$
e) Écart interquartile : $x_{3/4} - x_{1/4}$	*e) Écart interquartile* : $x_{3/4} - x_{1/4}$
f) Écart interdécile : $x_{9/10} - x_{1/10}$	*f) Écart interdécile* : $x_{9/10} - x_{1/10}$

A.6.2 LOIS DE PROBABILITÉ USUELLES

a) Lois discrètes

LOIS	$\{(x, p_x),\ x \in \mathcal{V}\}$	$M(t)$	μ, σ^2	μ_3, μ_4	γ_1, γ_2
Uniforme $\mathcal{U}(1, \ldots, n)$	$x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $p_x = \dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} \mathrm{e}^{tx}$	$\mu = \dfrac{n+1}{2}$ $\sigma^2 = \dfrac{n^2-1}{12}$	$\mu_3 = 0$ $\mu_4 = \dfrac{(n^2-1)(3n^2-7)}{20}$	$\gamma_1 = 0$ $\gamma_2 = -\dfrac{6(n^2+1)}{5(n^2-1)}$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ $0 < p < 1$ $q = 1 - p$	$x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ $p_x = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	$\left(q + p\mathrm{e}^t\right)^n$	$\mu = np$ $\sigma^2 = npq$	$\mu_3 = npq(q-p)$ $\mu_4 = npq(1 - 6pq + 3npq)$	$\gamma_1 = \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$ $\gamma_2 = \dfrac{1-6pq}{npq}$
Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ $0 < p < 1$ $q = 1 - p$	$x \in \{0, 1\}$ $p_x = p^x q^{1-x}$	$q + p\mathrm{e}^t$	$\mu = p$ $\sigma^2 = pq$	$\mu_3 = pq(q-p)$ $\mu_4 = pq(1-3pq)$	$\gamma_1 = \dfrac{q-p}{\sqrt{pq}}$ $\gamma_2 = \dfrac{1-6pq}{pq}$
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ $Np \in \mathbb{N}$ $q = 1 - p$	$x \in \mathbb{N}$ et $\max(0, n - Nq) \leqslant x \leqslant \min(n, Np)$ $p_x = \dfrac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\ldots$	$\mu = np$ $\sigma^2 = \dfrac{N-n}{N-1} npq$	$\ldots$	$\ldots$

a) Lois discrètes (suite)

LOIS	$\{(x,p_x),\ x\in\mathcal{V}\}$	$M(t)$	μ,σ^2	μ_3,μ_4	γ_1,γ_2
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ $\lambda>0$	$x\in\mathbb{N}$ $p_x=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	$\exp\left[\lambda\left(\mathrm{e}^t-1\right)\right]$	$\mu=\lambda$ $\sigma^2=\lambda$	$\mu_3=\lambda$ $\mu_4=\lambda+3\lambda^2$	$\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $\gamma_2=\dfrac{1}{\lambda}$
Géométrique (Pascal)	$x\in\mathbb{N}$ $p_x=pq^{x-1}$	$\dfrac{p\mathrm{e}^t}{1-q\mathrm{e}^t}$	$\mu=\dfrac{1}{p}$ $\sigma^2=\dfrac{q}{p^2}$	$\mu_3=\dfrac{q(q+1)}{p^3}$ $\mu_4=\dfrac{q(9q+p^2)}{p^4}$	$\gamma_1=\dfrac{q+1}{\sqrt{q}}$ $\gamma_2=9+\dfrac{p^2}{q}$
Binomiale négative $\mathcal{BN}(n,p)$ $0<p<1$ $q=1-p$	$x\in\mathbb{N}$ $p_x=\begin{pmatrix} n+x-1 \\ n-1 \end{pmatrix}p^nq^x$	$\left(\dfrac{p}{1-q\mathrm{e}^t}\right)^n$	$\mu=n\dfrac{q}{p}$ $\sigma^2=n\dfrac{q}{p^2}$	$\mu_3=n\dfrac{q}{p^3}(q+1)$ $\mu_4=\dfrac{nq}{p^4}[(q+2)+3(nq-1)]$	$\gamma_1=\dfrac{q+1}{\sqrt{nq}}$ $\gamma_2=\dfrac{(q+2)^2+3(nq-1)}{nq}$

b) Lois continues

LOIS	$f(x),\ x\in\mathbb{R}$	$M(t)$	μ,σ^2	μ_3,μ_4	γ_1,γ_2
Uniforme $\mathcal{U}[a,b]$ $a,b\in\mathbb{R}$ $a<b$	$\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{bt}-\mathrm{e}^{at}}{(b-a)t}$	$\mu=\dfrac{a+b}{2}$ $\sigma^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\mu_3=0$ $\mu_4=\dfrac{(b-a)^4}{80}$	$\gamma_1=0$ $\gamma_2=-\dfrac{6}{5}$

b) Lois continues (suite 1)

LOIS	$f(x),\ x \in \mathbb{R}$	$M(t)$	μ, σ^2	μ_3, μ_4	γ_1, γ_2
Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma^2 \in \mathbb{R}_0^+$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\exp\left[t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right]$	μ σ^2	$\mu_3 = 0$ $\mu_4 = 3\sigma^4$	$\gamma_1 = 0$ $\gamma_2 = 0$
Laplace $\mathcal{L}(\theta, \phi)$ $\theta \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathbb{R}_0^+$	$\frac{1}{2\phi} \exp\left[-\left\lvert\frac{x-\theta}{\phi}\right\rvert\right]$	$\frac{e^{t\theta}}{1+t^2\phi^2}$	$\mu = 0$ $\sigma^2 = 2\phi^2$	$\mu_3 = 0$ $\mu_4 = 24\phi^2$	$\gamma_1 = 0$ $\gamma_2 = 0$
Exponentielle négative $\mathcal{EN}(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$ (si $t < \lambda$)	$\mu = \frac{1}{\lambda}$ $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$	$\mu_3 = \frac{2}{\lambda^3}$ $\mu_4 = \frac{9}{\lambda^4}$	$\gamma_1 = 2$ $\gamma_2 = 6$
Gamma $\Gamma(p, \lambda)$ $p > 0$ $\lambda > 0$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} x^{p-1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ où $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$	$\frac{1}{(1-\frac{t}{\lambda})^p}$ (si $t < \lambda$)	$\mu = \frac{p}{\lambda}$ $\sigma^2 = \frac{p}{\lambda^2}$	N.B. : Si $p = 1$: Exponentielle négative Si $\lambda = 1$: Gamma standard Si $p = \frac{\nu}{2}$ ($\nu \in \mathbb{N}_0$) et $\lambda = \frac{1}{2}$: loi khi-carré	
Logistique	$\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$		$\mu = 0$ $\sigma^2 = \frac{\pi^3}{3}$		

Rappel : $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$ si $p > 1$; $\Gamma(p) = (p-1)!$ si $p \in \mathbb{N}_0$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

b) Lois continues (suite 2)

(Rappel : $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$ si $p > 1$; $\Gamma(p) = (p-1)!$ si $p \in \mathbb{N}_0$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$)

LOIS	$f(x),\ x \in \mathbb{R}$	$M(t)$	μ, σ^2	μ_3, μ_4	γ_1, γ_2
Pareto $\mathcal{P}ar(\lambda,\theta)$ $\lambda > 1$ $\theta > 0$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ \dfrac{\lambda-1}{\theta}\left(\dfrac{\theta}{x}\right)^{\lambda} & \text{si } x \geqslant \theta \end{cases}$		$\mu = \dfrac{\lambda-1}{\lambda-2}\theta$ (si $\lambda > 2$) $\sigma^2 = \dfrac{\lambda-1}{(\lambda-3)(\lambda-2)^2}\theta^2$ (si $\lambda > 3$)		
Khi-carré χ^2_ν	$\begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$\dfrac{1}{(1-2t)^{\frac{\nu}{2}}}$	$\mu = \nu$ $\sigma^2 = 2\nu$	$\mu_3 = 8\nu$ $\mu_4 = 12\nu(\nu+4)$ N.B. : $\sqrt{2\chi^2_\nu} \approx \mathcal{N}(\sqrt{2\nu-1}\ ,\ 1)$	$\gamma_1 = \dfrac{4}{\sqrt{2\nu}}$ $\gamma_2 = \dfrac{12}{\nu}$
Student t_ν	$\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$ $x \in \mathbb{R}$		$\mu = 0$ $(\nu > 1)$ $\sigma^2 = \dfrac{\nu}{\nu-2}$ $(\nu > 2)$	$\mu_3 = 0$ $\mu_4 = \dfrac{3\nu^2}{(\nu-2)(\nu-4)}$ $(\nu > 4)$	$\gamma_1 = 0$ $\gamma_2 = \dfrac{6}{\nu-4}$ $(\nu > 4)$
Fisher-Snédecor F_{ν_1,ν_2}	$\begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1} \\ \quad \times\left(1+\dfrac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$		$\mu = \dfrac{\nu_2}{\nu_2-2}$ $(\nu_2 > 2)$ $\sigma^2 = \dfrac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$ $(\nu_2 > 4)$	N.B. : $F_{\nu_1,\nu_2} \approx \dfrac{\chi^2_{\nu_1}}{\nu_1}$ si $\nu_2 \to \infty$ $Z = \dfrac{1}{2}\ln F_{\nu_1,\nu_2} \approx \mathcal{N}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\nu_2}-\dfrac{1}{\nu_1}\right)\ ,\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\nu_2}+\dfrac{1}{\nu_1}\right)\right]$ si $\nu_1,\nu_2 \to \infty$	