Chapitre 11 : correction des exercices pratiques

E.11.1

Population $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ inconnu et $\sigma^2 = 6400$
$n = 25$
$\overline{x} = 81.2$

$$\begin{aligned} \text{I.C.}(\mu; 0.95) &= \left[\overline{x} \pm z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[81.2 \pm (1.96)\frac{80}{\sqrt{25}}\right] \\ &= [81.2 \pm 31.36] = [49.84 \ ; 112.56] \end{aligned}$$

E.11.2

Population $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ inconnu et $\sigma^2 = 16$:

$$\text{I.C.}(\mu; 0.90) = \left[\overline{x} \pm z_{0.95}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[\overline{x} \pm (1.6449)\frac{4}{\sqrt{n}}\right].$$

On recherche n tel que

$$\begin{aligned} &(1.6449)\frac{4}{\sqrt{n}} \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & n \geq (1.6449)^2 4^2 = 43.29. \end{aligned}$$

Il faut donc que la taille n de l'échantillon soit supérieure ou égale à 44.

E.11.3

Population $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ^2 inconnus
$n = 17$
$\overline{x} = 4.7$
$s^2 = 5.76$

$$\begin{aligned} \text{I.C.}(\mu; 0.95) &= \left[\overline{x} \pm t_{n-1;0.975}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right] = \left[4.7 \pm (2.120)\frac{\sqrt{5.76}}{\sqrt{16}}\right] \\ &= [4.7 \pm 1.272] = [3.428 \ ; 5.972] \end{aligned}$$

$$\text{I.C.}(\sigma^2; 0.95) = \left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1;0.975}} \ ; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1;0.025}}\right] = \left[\frac{17(5.76)}{28.85} \ ; \frac{17(5.76)}{6.91}\right] = [3.39 \ ; 14.17]$$

$\boxed{\textbf{E.11.4}}$

Population $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ^2 inconnus
$n = 10$
$\overline{x} = 10$
$s^2 = 1.96$

$$
\begin{aligned}
\text{I.C.}(\mu; 0.95) &= \left[\overline{x} \pm t_{n-1;0.975}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right] = \left[10 \pm (2.262)\frac{\sqrt{1.96}}{3}\right] = [8.944\ ; 11.056]\ ; \\
\text{I.C.}(\mu; 0.99) &= \left[\overline{x} \pm t_{n-1;0.995}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right] = \left[10 \pm (3.250)\frac{\sqrt{1.96}}{3}\right] = [8.483\ ; 11.517]\ ; \\
\text{I.C.}(\sigma^2; 0.95) &= \left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1;0.975}}\ ; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1;0.025}}\right] = \left[\frac{10(1.96)}{19.02}\ ; \frac{10(1.96)}{2.70}\right] = [1.030\ ; 7.259]\ ; \\
\text{I.C.}(\sigma^2; 0.99) &= \left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1;0.995}}\ ; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1;0.005}}\right] = \left[\frac{10(1.96)}{23.59}\ ; \frac{10(1.96)}{1.73}\right] = [0.831\ ; 11.329]\,.
\end{aligned}
$$

On observe clairement ici que les I.C. au niveau de confiance 0.99 sont plus larges que les I.C. au niveau de confiance 0.95.

$\boxed{\textbf{E.11.5}}$

Population $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ avec μ inconnu
$n = 16$
$\overline{x} = 80.2$

(a) $\sigma^2 = 0.09$:

$$
\begin{aligned}
\text{I.C.}(\mu; 0.95) &= \left[\overline{x} \pm z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[80.2 \pm (1.96)\frac{\sqrt{0.09}}{\sqrt{16}}\right] \\
&= [80.2 \pm 0.147] = [80.053\ ; 80.347]
\end{aligned}
$$

(b) $s = 0.3$:

$$
\begin{aligned}
\text{I.C.}(\sigma^2; 0.95) &= \left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1;0.975}}\ ; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1;0.025}}\right] = \left[\frac{16(0.3)^2}{27.49}\ ; \frac{16(0.3)^2}{6.26}\right] \\
&= [0.052\ ; 0.230]
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{E.11.6}}$

Population $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ^2 inconnus
$n = 26$
$\overline{x} = 125$
$s = 10$

(a)

$$\begin{aligned}
\text{I.C.}(\mu;0.95) &= \left[\overline{x} \pm t_{n-1;0.975}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right] = \left[125 \pm (2.060)\frac{10}{\sqrt{25}}\right] \\
&= [125 \pm 4.12] = [120.88\ ;129.12]\ \ ; \\
\text{I.C.}(\sigma^2;0.95) &= \left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1;0.975}}\ ;\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1;0.025}}\right] = \left[\frac{26\times 10^2}{40.65}\ ;\frac{26\times 10^2}{13.12}\right] \\
&= [63.96\ ;198.17]\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\text{I.C.}(\mu;1-\alpha) &= \left[\overline{x} \pm t_{n-1;1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right] \\
&= \left[125 \pm t_{25;1-\alpha/2}\frac{10}{5}\right] \\
&= \left[125 \pm 2\ t_{25;1-\alpha/2}\right].
\end{aligned}$$

On recherche α tel que

$$\begin{aligned}
& 2\ t_{25;1-\alpha/2} = 5 \\
\Leftrightarrow\quad & t_{25;1-\alpha/2} = \frac{5}{2} = 2.5.
\end{aligned}$$

La table des quantiles de la loi de Student nous indique que

$$t_{25;0.99} = 2.485 \cong 2.5.$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
& 1-\frac{\alpha}{2} = 0.99 \\
\Rightarrow\quad & \frac{\alpha}{2} = 0.01 \\
\Rightarrow\quad & \alpha = 0.02 = 2\%.
\end{aligned}$$

E.11.7

Population de loi inconnue, de moyenne μ inconnue ; $\sigma = 4$.

I) PEAR - $n = 64$ - $\overline{x} = 48$:

$$\begin{aligned}
\text{I.C.}(\mu;0.95) &= \left[\overline{x} \pm z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[48 \pm (1.96)\frac{4}{\sqrt{64}}\right] \\
&= [48 \pm 0.98] = [47.02\ ;48.98]\ \ ; \\
\text{I.C.}(\mu;0.99) &= \left[\overline{x} \pm z_{0.995}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[48 \pm (2.5758)\frac{4}{\sqrt{64}}\right] \\
&= [48 \pm 1.29] = [46.71\ ;49.29]\,.
\end{aligned}$$

II) PESR - $n = 64$ - $\overline{x} = 48$:

a) $N = 1\ 000$:

$$\begin{aligned}\text{I.C.}(\mu; 0.95) &= \left[\overline{x} \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\,\frac{\sigma^2}{n}}\right] = \left[48 \pm (1.96)\sqrt{\frac{1\ 000-64}{999}\,\frac{4}{\sqrt{64}}}\right] \\ &= [48 \pm 0.95] = [47.05\ ; 48.95]\,.\end{aligned}$$

b) $N = 100\ 000$:

$$\begin{aligned}\text{I.C.}(\mu; 0.95) &= \left[\overline{x} \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\,\frac{\sigma^2}{n}}\right] = \left[48 \pm (1.96)\sqrt{\frac{100\ 000-64}{99\ 999}\,\frac{4}{\sqrt{64}}}\right] \\ &= [48 \pm 0.98] = [47.02\ ; 48.98]\,.\end{aligned}$$

Lorsque le taux de sondage n/N n'est pas négligeable, le sondage PESR s'avère plus « efficace » que le sondage PEAR, en ce sens que l'estimateur $\overline{x}$ de μ jouit d'une plus petite variance, donc d'une meilleure précision, dans le cas du sondage SR. A niveau de confiance fixé, l'I.C. pour μ est alors un peu plus étroit si l'échantillon est prélevé par tirage PESR plutôt que par tirage PEAR.

E.11.8

Population de loi inconnue, de moyenne μ et de variance σ^2 inconnues.
$n = 50\,;\ \overline{x} = 43\,;\ s = 2$

$$\begin{aligned}\text{I.C.}(\mu; 0.95) &= \left[\overline{x} \pm z_{0.975}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right] = \left[43 \pm (1.96)\frac{2}{\sqrt{49}}\right] \\ &= [43 \pm 0.56] = [42.44\ ; 43.56]\ \ ; \\ \text{I.C.}(\mu; 0.99) &= \left[\overline{x} \pm z_{0.995}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right] = \left[43 \pm (2.5758)\frac{2}{\sqrt{49}}\right] \\ &= [43 \pm 0.74] = [42.26\ ; 43.74]\,.\end{aligned}$$

Cet exercice illustre à nouveau le fait que l'I.C. au niveau de confiance 0.99 est plus large que l'I.C. au niveau de confiance 0.95.

E.11.9

$n = 400\,;\ \widehat{\pi}_A = \frac{40}{400} = 0.10 = 10\%$

I) PEAR

$$\begin{aligned}\text{I.C.}(\pi_A; 0.95) &= \left[\widehat{\pi}_A \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{\widehat{\pi}_A(1-\widehat{\pi}_A)}{n}}\right] = \left[0.1 \pm (1.96)\sqrt{\frac{(0.1)(0.9)}{400}}\right] \\ &= [0.1 \pm 0.029] = [0.071\ ; 0.129]\end{aligned}$$

II) PESR

Dans le cas d'un sondage PESR de taille n dans une population de taille N,

$$\text{V}(\widehat{\pi}) = \frac{N-n}{N-1}\,\frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

et on peut estimer $\mathrm{V}(\widehat{\pi})$ via[1]

$$\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\pi}) = \frac{N-n}{N-1}\,\frac{\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi})}{n-1}.$$

Dès lors,

$$\text{I.C.}(\pi; 1-\alpha) = \left[\widehat{\pi} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\pi})}\right] = \left[\widehat{\pi} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\,\frac{\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi})}{n-1}}\right].$$

a) $N = 5\ 000$:

$$\begin{aligned}
\text{I.C.}(\pi_A; 0.95) &= \left[\widehat{\pi}_A \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\,\frac{\widehat{\pi}_A(1-\widehat{\pi}_A)}{n-1}}\right] \\
&= \left[0.1 \pm (1.96)\sqrt{\frac{5\ 000-400}{4\ 999}\,\frac{(0.1)(0.9)}{399}}\right] \\
&= [0.1 \pm 0.028] = [0.072\ ; 0.128]
\end{aligned}$$

b) $N = 1\ 000\ 000$:

$$\begin{aligned}
\text{I.C.}(\pi_A; 0.95) &= \left[0.1 \pm (1.96)\sqrt{\frac{1\ 000\ 000-400}{999\ 999}\,\frac{(0.1)(0.9)}{399}}\right] \\
&= [0.1 \pm 0.029] = [0.071\ ; 0.129]
\end{aligned}$$

1. En effet, nous savons que $\widehat{\pi} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathcal{S}} x_i$, où $x_i = 1$ si l'unité statistique n° i possède la caractéristique qui nous intéresse et $x_i = 0$ sinon. Dès lors, dans le cas du tirage PESR d'un échantillon de taille n dans une population de taille N,

$$\mathrm{V}(\widehat{\pi}) = \mathrm{V}(\overline{x}) = \frac{N-n}{N-1}\,\frac{\sigma^2}{n}$$

avec

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{N}\sum_{i\in U}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i\in U}x_i^2 - \mu^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i\in U}x_i - \pi^2 = \pi - \pi^2 = \pi(1-\pi)\ ;
\end{aligned}$$

on peut estimer sans biais $\mathrm{V}(\widehat{\pi})$ via

$$\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\pi}) = \widehat{\mathrm{V}}(\overline{x}) = \frac{N-n}{N-1}\,\frac{s^2}{n-1}$$

avec

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathcal{S}}(x_i-\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathcal{S}}x_i^2 - \overline{x}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathcal{S}}x_i - \widehat{\pi}^2 = \widehat{\pi} - \widehat{\pi}^2 = \widehat{\pi}(1-\widehat{\pi}).
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\pi}) = \frac{N-n}{N-1}\,\frac{\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi})}{n-1}\ .$$

Lorsque N est grand et que n est négligeable par rapport à N (taux de sondage extrêmement faible), le sondage PESR est pratiquement équivalent au sondage PEAR. On obtient alors le même intervalle de confiance pour π_A, que l'on considère que l'échantillon a été prélevé avec remise ou sans remise.

E.11.10

$n = 1\ 600$, $\widehat{\pi} = \frac{576}{1\ 600} = 0.36$

I) PEAR :

$$\begin{aligned} \text{I.C.}(\pi; 0.95) &= \left[\widehat{\pi} \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi})}{n}}\right] = \left[0.36 \pm (1.96)\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{1\ 600}}\right] \\ &= [0.36 \pm 0.024] = [0.336\ ; 0.384] \end{aligned}$$

II) PESR :

a) $N = 5\ 000$:

$$\begin{aligned} \text{I.C.}(\pi; 0.95) &= \left[\widehat{\pi} \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\ \frac{\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi})}{n-1}}\right] \\ &= \left[0.36 \pm (1.96)\sqrt{\frac{5\ 000 - 1\ 600}{4\ 999}\ \frac{(0.36)(0.64)}{1\ 599}}\right] \\ &= [0.36 \pm 0.019] = [0.341\ ; 0.379] \end{aligned}$$

b) $N = 1\ 000\ 000$:

$$\begin{aligned} \text{I.C.}(\pi; 0.95) &= \left[0.36 \pm (1.96)\sqrt{\frac{1\ 000\ 000 - 1\ 600}{999\ 999}\ \frac{(0.36)(0.64)}{1\ 599}}\right] \\ &= [0.36 \pm 0.024] = [0.336\ ; 0.384] \end{aligned}$$

E.11.11

$n = 3\ 900$

$\pi =$ proportions de garçons nés dans la commune

$\widehat{\pi} = \frac{2\ 028}{3\ 900} = 0.52 = 52\%$

$$\begin{aligned} \text{I.C.}(\pi; 0.95) &= \left[\widehat{\pi} \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi})}{n}}\right] = \left[0.52 \pm (1.96)\sqrt{\frac{(0.52)(0.48)}{3\ 900}}\right] \\ &= [0.52 \pm 0.016] = [0.504\ ; 0.536] = [50.4\%\ ; 53.6\%] \end{aligned}$$

E.11.12

$\widehat{\pi}_A = 10\% = 0.10.$

On recherche n tel que

$$\begin{aligned}
& (1.96)\sqrt{\frac{(0.10)(0.90)}{n}} \leq 0.02 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(0.10)(0.90)}{n} \leq \left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & n \geq \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 (0.10)(0.90) = 864.36 \ .
\end{aligned}$$

Il faut donc prélever au moins 865 électeurs dans le corps électoral.

E.11.13

$n = 1\ 650$
$\pi =$ la proportion de personnes de la ville qui fument au moins deux paquets de cigarettes par jour
$\widehat{\pi} = \frac{198}{1\ 650} = 0.12$

(a)

$$\begin{aligned}
\text{I.C.}(\pi; 0.95) &= \left[\widehat{\pi} \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi})}{n}}\right] = \left[0.12 \pm (1.96)\sqrt{\frac{(0.12)(0.88)}{1\ 650}}\right] \\
&= [0.12 \pm 0.016] = [0.104\ ; 0.136]
\end{aligned}$$

(b) On recherche n tel que

$$\begin{aligned}
& (1.96)\sqrt{\frac{(0.12)(0.88)}{n}} \leq 0.02 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(0.12)(0.88)}{n} \leq \left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & n \geq \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 (0.12)(0.88) = 1\ 014.18 \ .
\end{aligned}$$

Il faut donc prélever au moins 1 015 personnes dans la ville.

E.11.14

$n = 2\ 500$
$\pi =$ proportion de la population du pays atteinte de la maladie
$\widehat{\pi} = \frac{300}{2\ 500} = 0.12$

$$\begin{aligned}
\text{I.C.}(\pi; 0.95) &= \left[\widehat{\pi} \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{\widehat{\pi}(1-\widehat{\pi})}{n}}\right] = \left[0.12 \pm (1.96)\sqrt{\frac{(0.12)(0.88)}{2\ 500}}\right] \\
&= [0.12 \pm 0.013] = [0.107\ ; 0.133]
\end{aligned}$$

E.11.15

L'énoncé nous indique que :

$$\begin{array}{ll} n_1 = 13\ ; & n_2 = 12\ ; \\ \overline{x}_1 = 72\ ; & \overline{x}_2 = 79\ ; \\ s_1^2 = 65\ ; & s_2^2 = 48. \end{array}$$

On peut tenir le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{P}\left[-t_{n_1+n_2-2;1-\alpha/2} \leq \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \leq t_{n_1+n_2-2;1-\alpha/2}\right] = 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{I.C.}(\mu_1 - \mu_2; 1-\alpha) = \left[(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2;1-\alpha/2}\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\right]. \end{aligned}$$

Nous avons donc ici :

$$\begin{aligned} \mathrm{I.C.}(\mu_1 - \mu_2; 0.95) &= \left[(72 - 79) \pm t_{23;0.975}\sqrt{\frac{13 \times 65 + 12 \times 48}{23}\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{12}\right)}\right] \\ &= \left[(-7) \pm (2.069)\sqrt{\frac{13 \times 65 + 12 \times 48}{23}\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{12}\right)}\right] \\ &= \left[(-7) \pm 6.51\right] = \left[-13.51\ ; -0.49\right]. \end{aligned}$$

E.11.16

L'énoncé nous indique que :

$$\begin{array}{ll} n_1 = 10\ ; & n_2 = 10\ ; \\ \overline{x}_1 = 4.8\ ; & \overline{x}_2 = 7.8\ ; \\ s_1^2 = 8.64\ ; & s_2^2 = 7.88. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I.C.}(\mu_1 - \mu_2; 0.95) &= \left[(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2;1-\alpha/2}\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\right] \\ &= \left[(4.8 - 7.8) \pm t_{18;0.975}\sqrt{\frac{10 \times 8.64 + 10 \times 7.88}{18}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)}\right] \\ &= \left[(-3) \pm (2.101)\sqrt{\frac{8.64 + 7.88}{18}\ 2}\right] \\ &= \left[(-3) \pm 2.85\right] = \left[-5.85\ ; -0.15\right] \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{E.11.17}}$

Par la relation (11.49), on sait que, si n_1 est « grand »,

$$\overline{x}_1 \approx \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{s_1^2}{n_1 - 1}\right)$$

et, si n_2 est « grand »,

$$\overline{x}_2 \approx \mathcal{N}\left(\mu_2, \frac{s_2^2}{n_2 - 1}\right).$$

Par ailleurs, si les deux échantillons sont prélevés indépendamment l'un de l'autre, les v.a. $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$ sont indépendantes et

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \approx \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1-1} + \frac{s_2^2}{n_2-1}}} \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

L'intervalle

$$\left[(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}\right]$$

est dès lors un I.C. (approché) pour la différence de moyennes $\mu_1 - \mu_2$, au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Dans notre cas, nous avons

$$\begin{array}{ll} n_1 = 40\ ; & n_2 = 50\ ; \\ \overline{x}_1 = 74\ ; & \overline{x}_2 = 78\ ; \\ s_1^2 = 62.4\ ; & s_2^2 = 48.02. \end{array}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \text{I.C.}(\mu_1 - \mu_2; 0.95) &= \left[(74 - 78) \pm 1.96\sqrt{\frac{62.4}{39} + \frac{48.02}{49}}\right] \\ &= [(-4) \pm 3.15] = [-7.15\ ; -0.85]\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{E.11.18}}$

$$\text{I.C.}(\mu_d; 0.95) = \left[\overline{d} \pm z_{0.975}\frac{s_d}{\sqrt{n-1}}\right]$$

avec $n = 100$, $\overline{d} = 0.5$ et $s_d^2 = 1.35$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{I.C.}(\mu_d; 0.95) &= \left[0.5 \pm (1.96)\sqrt{\frac{1.35}{99}}\right] = [0.5 \pm 0.23] \\ &= [0.27\ ; 0.73] \end{aligned}$$

E.11.19

On a

$$\widehat{\pi}_1 \approx \mathcal{N}\left(\pi_1, \frac{\widehat{\pi}_1(1-\widehat{\pi}_1)}{n_1}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{\pi}_2 \approx \mathcal{N}\left(\pi_2, \frac{\widehat{\pi}_2(1-\widehat{\pi}_2)}{n_2}\right).$$

Par ailleurs, si les deux échantillons sont prélevés indépendamment l'un de l'autre, les v.a. $\widehat{\pi}_1$ et $\widehat{\pi}_2$ sont indépendantes et

$$\widehat{\pi}_1 - \widehat{\pi}_2 \approx \mathcal{N}\left(\pi_1 - \pi_2, \frac{\widehat{\pi}_1(1-\widehat{\pi}_1)}{n_1} + \frac{\widehat{\pi}_2(1-\widehat{\pi}_2)}{n_2}\right).$$

L'intervalle

$$\left[(\widehat{\pi}_1 - \widehat{\pi}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\pi}_1(1-\widehat{\pi}_1)}{n_1} + \frac{\widehat{\pi}_2(1-\widehat{\pi}_2)}{n_2}}\right]$$

est dès lors un I.C. (approché) pour la différence de proportions $\pi_1 - \pi_2$, au niveau de confiance $1-\alpha$.

Dans notre cas, nous avons

$$\begin{array}{ll} n_1 = 800\ ; & n_2 = 1\ 000\ ; \\ \widehat{\pi}_1 = \frac{600}{800} = 0.75\ ; & \widehat{\pi}_2 = \frac{700}{1\ 000} = 0.70. \end{array}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \text{I.C.}(\pi_1 - \pi_2; 0.95) &= \left[(0.75-0.70) \pm (1.96)\sqrt{\frac{(0.75)(0.25)}{800} + \frac{(0.70)(0.30)}{1\ 000}}\right] \\ &= [0.05 \pm 0.041] = [0.009\ ; 0.091] \\ &= [0.9\%\ ; 9.1\%]. \end{aligned}$$

E.11.20

L'énoncé nous indique que :

$$\begin{array}{ll} n_1 = 800\ ; & n_2 = 200\ ; \\ \widehat{\pi}_1 = \frac{560}{800} = 0.7\ ; & \widehat{\pi}_2 = \frac{120}{200} = 0.6. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{I.C.}(\pi_1 - \pi_2; 0.95) &= \left[(\widehat{\pi}_1 - \widehat{\pi}_2) \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{\widehat{\pi}_1(1-\widehat{\pi}_1)}{n_1} + \frac{\widehat{\pi}_2(1-\widehat{\pi}_2)}{n_2}}\right] \\ &= \left[(0.7-0.6) \pm (1.96)\sqrt{\frac{(0.7)(0.3)}{800} + \frac{(0.6)(0.4)}{200}}\right] \\ &= [0.1 \pm 0.075] = [0.025\ ; 0.175] \\ &= [2.5\%\ ; 17.5\%] \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{E.11.21}}$ L'énoncé nous indique que :

$$\begin{array}{ll} n_1 = 100 \ ; & n_2 = 100 \ ; \\ \widehat{\pi}_1 = \frac{75}{100} = 0.75 \ ; & \widehat{\pi}_2 = \frac{65}{100} = 0.65. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{I.C.}(\pi_1 - \pi_2; 0.95) &= \left[(\widehat{\pi}_1 - \widehat{\pi}_2) \pm z_{0.975} \sqrt{\frac{\widehat{\pi}_1(1-\widehat{\pi}_1)}{n_1} + \frac{\widehat{\pi}_2(1-\widehat{\pi}_2)}{n_2}} \right] \\ &= \left[(0.75 - 0.65) \pm (1.96) \sqrt{\frac{(0.75)(0.25)}{100} + \frac{(0.65)(0.35)}{100}} \right] \\ &= [0.10 \pm 0.126] = [-0.026 \ ; 0.226] \\ &= [-2.6\% \ ; 22.6\%] \end{aligned}$$